ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 468, № 5, с. 499–501

МАТЕМАТИКА

УДК 512.745

ПОДГРУППЫ ГРУПП КРЕМОНЫ: ПРОБЛЕМА БАССА

© 2016 г. В. Л. Попов

Представлено академиком РАН А.Н. Паршиным 13.01.2016 г.
Поступило 20.01.2016 г.

Доказана общая теорема о чистоте расширений полей инвариантов. С ее помощью получен критерий рациональной триангулируемости связных разрешимых аффинных алгебраических подгрупп групп Кремоны. Он использован для доказательства существования рационально нетриангулируемых подгрупп указанного вида и для доказательства их стабильной рациональной триангулируемости. Последнее свойство дает положительный ответ на проблему Басса на стабильном уровне. Получена общая конструкция всех рационально триангулируемых связных разрешимых аффинных алгебраических подгрупп групп Кремоны. В качестве приложения дана классификация всех связных одномерных унипотентных аффинных алгебраических подгрупп групп Кремоны с точностью до сопряженности.

DOI: 10.7868/S0869565216170072

1. Группа Кремоны $\mathscr{C}_n$ и аффинная группа Кремоны $\mathscr{AC}_n$ ранга n определяются соответственно как группа бирациональных и группа бирегулярных автоморфизмов n-мерного аффинного пространства $\mathbf{A}^n$. Они являются фундаментальными объектами исследования в алгебраической геометрии. Далее они естественно отождествляются с группами k-автоморфизмов соответственно поля $k(\mathbf{A}^n)$ и алгебры $k[\mathbf{A}^n]$, где k – основное поле определения, которое мы считаем алгебраически замкнутым. Мы полагаем $k(\mathbf{A}^0) = k[\mathbf{A}^0] := k$ и при $n > 1$ отождествляем $k(\mathbf{A}^{n-1})$ с подполем в $k(\mathbf{A}^n)$ с помощью вложения, определенного проекцией $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^{n-1}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Тем самым, $k[\mathbf{A}^{n-1}]$ является подалгеброй в $k[\mathbf{A}^n]$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – стандартные координатные функции на $\mathbf{A}^n$. Мы отождествляем $\mathscr{C}_{n-1}$ с подгруппой в $\mathscr{C}_n$ с помощью вложения $\mathscr{C}_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{C}_n$, $\varphi \mapsto \psi$, $\psi(x_i) := \varphi(x_i)$ при $i < n$ и $\psi(x_n) = x_n$. Тем самым, $\mathscr{AC}_{n-1}$ является подгруппой в $\mathscr{AC}_n$.

2. Хотя группы $\mathscr{C}_n$ и $\mathscr{AC}_n$ при $n > 1$ бесконечномерны, имеется далеко идущая аналогия между ними и аффинными алгебраическими группами: они обладают топологией Зарисского, торами, корнями, группами Вейля, ... Подгруппа Жонкьера $\mathscr{J}_n := \{\varphi \in \mathscr{AC}_n \mid \varphi(x_i) = \alpha_i x_i + h_i, \alpha_i \in k^\times, h_i \in k[\mathbf{A}^{i-1}]\}$ рассматривается некоторыми авторами как аналог борелевской подгруппы в $\mathscr{AC}_n$ (см. [1]). В пользу этой точки зрения говорит разрешимость ее аффинных алгебраических подгрупп (см. [6, теорема 3.1]). Имея в виду эту аналогию, Басс рассмотрел в [1] вопрос о том, верно ли, что всякая связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа G в $\mathscr{AC}_n$ сопряжена в $\mathscr{AC}_n$ подгруппе из $\mathscr{J}_n$. Он же получил в [1] отрицательный ответ для char $k = 0$, $n = 3$ и одномерной связной унипотентной группы G. В [5] затем это было распространено на случай любого $n > 2$. Так возникла следующая сформулированная Бассом в [1, Question 4] для случая char $k = 0$ проблема.

Проблема Басса о триангулируемости. "Если унипотентная группа G действует на $\mathbf{A}^n$, может ли это действие быть рационально триангулировано, т.е. можно ли записать $k(x_1, \ldots, x_n) = k(y_1, \ldots, y_n)$ так, что каждое подполе $k(y_1, \ldots, y_i)$ является G-инвариантным?"

3. Далее мы называем простые трансцендентные расширения полей их 1-расширениями, а подгруппу G в $\mathscr{C}_n$ рационально триангулируемой, если существует такой флаг $k(\mathbf{A}^n) =: K_n \supset K_{n-1} \supset \ldots \supset K_1 \supset K_0 := k$ инвариантных относительно G подполей в $k(\mathbf{A}^n)$, что каждое K_i является 1-расширением K_{i-1} для всех $i > 0$.

Ниже излагаются наши результаты по этой проблеме, рассмотренной в более широком контексте связных разрешимых алгебраических подгрупп в $\mathscr{C}_n$ и любой характеристики поля k. Мы, в частности, доказываем существование рацио-

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва
E-mail: popovvl@mi.ras.ru

нально нетриангулируемых связных разрешимых алгебраических подгрупп в $\mathscr{C}_n$ при $n > 4$ и $\operatorname{char} k \neq 2$ и их стабильную рациональную триангулируемость. Последнее дает положительный ответ на проблему Басса на стабильном уровне. Мы также даем общую конструкцию всех рационально триангулируемых связных разрешимых алгебраических подгрупп в $\mathscr{C}_n$.

4. Следующий общий результат (теорема 1) используется для доказательства теоремы 2, которая, в свою очередь, применяется в доказательстве критерия рациональной триангулируемости (теорема 3).

Теорема 1 (Инвариантные подполя 1-расширений). *Пусть P является 1-расширением конечно порожденного расширения Q поля k, а G — одномерная связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа в* $\operatorname{Aut}_k(P)$, *сохраняющая Q. Если $Q^G = Q$, то $P^G = Q^G$, а если $Q^G \subsetneq Q$, то P^G является 1-расширением Q^G.*

Теорема 2 (Чистота расширений полей инвариантов). *Для любого 1-расширения P конечно порожденного расширения Q поля k и любой связной разрешимой аффинной алгебраической подгруппы G в* $\operatorname{Aut}_k(P)$, *сохраняющей Q, либо $P^G = Q^G$, либо P^G является* 1-*расширением Q^G.*

Теорема 3 (Критерий рациональной триангулируемости). *Связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа G группы Кремоны $\mathscr{C}_n$ рационально триангулируема тогда и только тогда, когда $k(\mathbf{A}^n)^G$ чисто трансцендентно над k.*

Теорема 3 обобщает теорему 3.1 из [2], где утверждение теоремы 3 доказано для одномерных унипотентных алгебраических подгрупп группы $\mathscr{A}\mathscr{C}_n$ в случае $\operatorname{char} k = 0$.

Следствие 1 (Факторы малых размерностей). *Связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа G в $\mathscr{C}_n$ рационально триангулируема в любом из следующих случаев*:

(i) $\operatorname{trdeg}_k k(\mathbf{A}^n)^G \leq 1$;

(ii) $\operatorname{trdeg}_k k(\mathbf{A}^n)^G = 2$ *и* $\operatorname{char} k = 0$;

(iii) $G \subset \mathscr{A}\mathscr{C}_n$ *и либо* $\dim G \cdot x \geq n - 1$ *для некоторой точки* $x \in \mathbf{A}^n$, *либо* $\operatorname{char} k = 0$ *и* $\dim G \cdot x = n - 2$ *для некоторой точки* $x \in \mathbf{A}^n$.

Следствие 2 (3-мерное аффинное пространство). *Если* $\operatorname{char} k = 0$, *то каждая связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа в $\mathscr{A}\mathscr{C}_3$ рационально триангулируема.*

Следствие 2 обобщает следствие 3.2 из [2], где утверждение следствия 2 доказано для одномерных унипотентных алгебраических подгрупп в $\mathscr{A}\mathscr{C}_3$ и $\operatorname{char} k = 0$.

Следствие 3 (Торы). *Аффинный алгебраический тор T в группе Кремоны $\mathscr{C}_n$ рационально триангулируем тогда и только тогда, когда он сопряжен в $\mathscr{C}_n$ диагональному тору в группе всех невырожденных линейных преобразований переменных $x_1, \ldots, x_d$, где $d = \dim T$.*

5. Вопрос о существовании нетриангулируемых связных разрешимых аффинных алгебраических подгрупп в $\mathscr{C}_n$ решается следующей теоремой 4. Из нее, в частности, вытекает, что в следствии 1 (ii) число 2 не может быть заменено на большее целое число.

Теорема 4 (нетриангулируемые подгруппы). *Для любого целого числа n, большего 4, каждая $(n - 3)$-мерная связная разрешимая аффинная алгебраическая группа G изоморфна рационально нетриангулируемой алгебраической подгруппе группы Кремоны $\mathscr{C}_n$.*

Поскольку в формулировке теоремы 4 не утверждается, что подгруппа лежит в $\mathscr{A}\mathscr{C}_n$, отрицательного ответа на проблему Басса о триангулируемости она не дает. Однако ее доказательство демонстрирует тесную связь между триангулируемостью и проблемой Зарисского о сокращении: оно показывает, что если существует такое нерациональное алгебраическое многообразие Z, что $\mathbf{A}^n$ изоморфно $\mathbf{A}^s \times Z$, то ответ на проблему Басса о триангулируемости является отрицательным; в [7] доказано, что на бирациональном уровне верно и обратное утверждение.

С другой стороны, на стабильном уровне мы получаем положительный ответ на проблему Басса о триангулируемости. А именно, следующая теорема 5 показывает, что, несмотря на существование рационально нетриангулируемых связных разрешимых аффинных алгебраических подгрупп в $\mathscr{C}_n$, каждая такая подгруппа является стабильно рационально триангулируемой. Более точно, верна следующая

Теорема 5 (Стабильная триангулируемость). *Всякая связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа G группы Кремоны $\mathscr{C}_n$ рационально триангулируема в группе Кремоны $\mathscr{C}_m$ для любого $m \geq 2n - \operatorname{tr} \deg_k k(\mathbf{A}^n)^G$.*

Теорема 5 обобщает теорему 3.1 из [2], где утверждение теоремы 5 доказано для одномерных унипотентных алгебраических подгрупп в $\mathscr{A}\mathscr{C}_n$ в случае $\operatorname{char} k = 0$.

6. В [7] дана общая конструкция всех связных разрешимых алгебраических рационально триангулируемых подгрупп в $\mathscr{C}_n$. В качестве приложения она доставляет классификацию (см. ниже теорему 6) рационально триангулируемых одномерных унипотентных алгебраических подгрупп в $\mathscr{C}_n$ с точностью до сопряженности. В ней используется следующая терминология. Одномерная связная унипотентная алгебраическая подгруппа G в $\mathscr{C}_n$, отождествляемая с аддитивной группой k^+ поля k с помощью изоморфизма $G \to k^+$, называется стан-

дартной, если $x_1, ..., x_{n-1} \in k[\mathbf{A}^n]^G$ и для каждого $t \in k^+$ выполнено следующее:

(i) если $\operatorname{char} k = 0$, то $t(x_n) = x_n + t$ (тогда G называют сдвигом);

(ii) если $\operatorname{char} k = p > 0$, то $t(f_n) = f_n + c_1 t^{p^{i_1}} + ... + c_d t^{p^{i_d}}$, где все c_j – ненулевые элементы поля $k(x_1, ..., x_{n-1})$, а $i_1 < ... < i_d$ – неотрицательные целые числа.

Теорема 6 (Одномерные рационально триангулируемые унипотентные подгруппы). *Одномерная связная унипотентная алгебраическая подгруппа в $\mathcal{C}_n$ рационально триангулируема тогда и только тогда, когда она сопряжена в $\mathcal{C}_n$ стандартной подгруппе.*

Теорема 6 обобщает теорему 2.2 из [2], где утверждение теоремы 6 доказано в нулевой характеристике.

Следствие 4 (Аффинные пространства малых размерностей). *Пусть U – одномерная связная унипотентная алгебраическая подгруппа в $\mathcal{C}_n$.*

(i) *если $n = 2$, то U сопряжена в $\mathcal{C}_2$ стандартной подгруппе*;

(ii) *если* $\operatorname{char} k = 0$ *и* $n = 3$, *то U сопряжена в $\mathcal{C}_3$ сдвигу*.

Если $n = 2$ и $U \subset \mathcal{AC}_2$, то, согласно [8], при $\operatorname{char} k = 0$ и [4] при $\operatorname{char} k > 0$ “сопряжена в $\mathcal{C}_2$” в следствии 4 (i) можно заменить на “сопряжена в $\mathcal{AC}_2$”. Согласно [3], при $k = \mathbf{C}$, $n = 3$, $U \subset \mathcal{AC}_3$, если U действует на $\mathbf{A}^3$ свободно, то U сопряжена в $\mathcal{AC}_3$ сдвигу. Следствие 4 (ii) показывает, что, допуская сопряжение в $\mathcal{C}_3$, предположение о свободности действия в этом результате можно исключить, т. е. утверждение о сопряженности сдвигу становится верным для любой U в $\mathcal{C}_3$.

Работа поддержана грантом РФФИ 15–01–02158.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bass H.* A Non-Triangular Action of $\mathbb{G}_a$ on $\mathbb{A}^3$ // J. Pure and Appl. Algebra 1984. V. 33. P. 1–5.
2. *Deveney J.K., Finston D.R.* Rationally Triangulable Automorphisms // J. Pure and Appl. Algebra 1991. V. 72. P. 1–4.
3. *Kaliman S.* Free $\mathbb{C}_+$-Actions on $\mathbb{C}^3$ Are Translations // Invent. Math. 2004. V. 156. № 1. P. 163–173.
4. *Miyanishi M.* G_a-Action of the Affine Plane // Nagoya Math. J. 1971. V. 41. p. 97–100.
5. *Popov V.L.* On Actions of $\mathbf{G}_a$ on $\mathbf{A}^n$. In: Algebraic Groups. Utrecht, 1986 // Lect. Notes Math. 1987. V. 1271. P. 237–242.
6. *Popov V.L.* Some Subgroups of the Cremona Groups. In: Affine Algebraic Geometry, Proc. Conf. Occasion of M. Miyanishi’s 70th Birthday. Osaka, 3–6 March 2011. Singapore: World Sci. Publ., 2013. P. 213–242.
7. *Popov V.L.* Bass’ Trangulability Problem // arXiv: 1504.03867 (2015).
8. *Rentschler R.* Opérations du Groupe Additif sur le Plan // C.R. Acad. Sci. Paris. 1968. V. 267. P. 384–387.